Точно решаемые неоднородные космологические модели

1 Введение

В большинстве космологических моделей эволюция вселенной начинается из сингулярности, именуемой "большим взрывом". Именно в этой области классическая теория гравитации плохо определена. С другой стороны, в области больших энергий должны начать проявляться эффекты квантовой гравитации. С давних пор ожидалось, что квантование гравитационного поля должно устранить сингулярность большого взрыва.

Самые ранние попытки квантования космологических моделей содержатся в работах Уилера, ДеВитта и Мизнера [1]. В этих работах рассматривалась однородная изотропная вселенная Фридмана-Робертсона-Уокера со скалярным полем. Степени свободы такой модели составляют конформный фактор пространственной метрики a и скалярное поле ϕ. Так как в однородной модели вышеупомянутые поля не зависят от пространственных координат, её действие сводится к интегралу только по времени. В гамильтоновой (АДМ) форме оно имеет вид:

$$S = \int dt\Big(\dot{a}p_a + \dot{\phi}p_\phi - \lambda\mathcal{H}\Big),$$

где p_a и p_ϕ – импульсы, сопряженные a и ϕ, и

$$\mathcal{H} = \frac{p_a^2}{2a} - H_\phi = 0$$

– гамильтонова связь.

Квантование данной модели приводит к уравнению Уилера-ДеВитта на волновую функцию:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(a,\phi) = 0,$$

где $\hat{\mathcal{H}}$ – квантовая версия гамильтоновой связи. Уравнение получается наиболее простым если в качестве ϕ взять безмассовое поле без самодействия,

$$H_\phi = \frac{p_\phi^2}{2a^3}.$$

Тогда квантовая гамильтонова связь $(\hat{p}_a^2\hat{a}^2 - \hat{p}_\phi^2)\Psi = 0$ приводит к следующему уравнению Уилера-ДеВитта:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\Psi(\alpha,\phi) = 0,$$

где $\alpha = \log(a)$. Оно выглядит как волновое уравнение безмассовой релятивистской частицы в двумерном пространстве-времени. Из этого уравнения не следует никаких ограничений на спектр координат или импульсов модели. Кроме того, как было показано в [3] с использованием численных расчетов, гауссово состояние, сконцентрированное вокруг классического решения, не размывается и следует за классическим решением в сингулярность. Иными словами, квантование вышеописанной однородной модели не приводит к устранению сингулярности.

Значит ли это, что сингулярности неизбежны и в квантовой гравитации, и, как следствие, теория Эйнштейна не полна даже после квантования?

Здесь нужно обратить внимание на два важных свойства теории гравитации, которыми однородная модель пренебрегает.

Во-первых теория имеет бесконечное число степеней свободы. В однородной модели полевые степени свободы "заморожены". Однако существуют примеры, когда квантование сектора теории изолированно оказывалось не эквивалентным квантованию полной теории с последующим выделением этого сектора, [2]. Такой аргумент часто приводится в качестве обоснования подхода, называемого "петлевой квантовой космологией", где сначала делается попытка квантования полной теории с последующим решением связей, а затем выделением однородного сектора в пространстве решений, см.,например,[4].

Другое свойство – это нелокальность динамических переменных теории гравитации. Она является естественным следствием диффеоморфной инвариантности теории, однако теряется в однородной модели. Динамику определяют только величины не зависящие от координат. Локальные поля смещаются при координатных преобразованиях, и поэтому значение поля в точке не является инвариантной наблюдаемой. Инварианты имеют вид некоторых интегральных характеристик многообразия, в общем случае не сводящихся к локальным. Исключение составляет как раз однородная модель, где поле, не меняясь от точки к точке, не преобразуется при диффеоморфизмах. Поэтому поле в точке может быть взято в качестве инвариантной переменной. Нелокальные инвариантные характеристики многообразия часто имеют ограниченную область значений (например дефицит угла или число намоток). Значения локального поля в точке, в свою очередь, ничем не ограничены. Поэтому использование локальных полей вместо интегральных инвариантов многообразия в качестве динамических переменных может привести к потере физически важной информации.

Какое из двух вышеупомянутых свойств является ключевым для устранения сингулярности в квантовой теории? Ответ на этот вопрос можно попробовать получить если рассмотреть теорию обладающую только одним из этих свойств. Пример такой теории – гравитация в $2+1$ измерениях в присутствии точечных частиц (или пылевидной материи). У нее отсутствуют полевые степени свободы, а степени свободы, связанные с частицами, выражаются через интегральные инварианты многообразия.

Можно рассмотреть однородную космологическую модель со скалярным полем аналогичную [1] и в $2+1$ - мерном случае. Результаты будут в целом такими же как и в $3+1$ измерениях с той лишь разницей, что теперь Ньютоново притяжение отсутствует, и существуют статические решения с нулевой космологической постоянной. Если, однако, выбрать начальные данные так, что вселенная расширяется (сжимается), то у решения имеется сингулярность в прошлом (будущем). Квантование аналогичное [1] не избавляет теорию от этих сингулярностей.

Ситуация меняется если мы откажемся от однородности. Простейший неоднородный случай – замкнутая вселенная с двумя точечными частицами. Здесь уже нет полей, локальные значения которых могли бы быть использованы в качестве динамических переменных. Все инвариантные наблюдаемые – интегральные характеристики многообразия.

Эти характеристики нетрудно идентифицировать. Прежде всего заметим, что тензор Римана в отсутствии материи равен нулю и имеет дельта–функциональные особенности в точках, где находятся частицы.

$$R^{ab}_{\mu\nu} \sim \delta^2(x - x_p)$$

То есть пространство локально плоское и может быть получено путем склеивания кусков пространства Минковского. Из непрерывности метрики следует, что каждому топологически нетривиальному пути на полученном многообразии (или его пространственном сечении) может быть сопоставлен элемент группы изометрий пространства Минковского, т.е. группы Пуанкаре в $2+1$ измерениях. Каждый такой элемент группы Пуанкаре становится динамической переменной теории.

В случае двух частиц существует всего два топологически нетривиальных пути – путь соединяющий две частицы и замкнутый путь вокруг одной из частиц. Если мы рассматриваем частицы без спина то пути соединяющему две частицы сопоставляется преобразование, состоящее из чистой трансляции, а пути вокруг частицы чистое преобразование Лоренца. Очевидно, линейный размер вселенной, т.е. расстояние между частицами, определяется трансляцией. Оставшееся преобразование Лоренца – это канонически сопряженный ей импульс. То, что импульсное пространство есть не линейное пространство, а групповое многообразие имеет ряд нетривиальных следствий при квантовании. Главное из них то, что одна из координат, канонически сопряженная подгруппе вращений в группе Лоренца, имеет дискретный спектр. Это дает шанс на избавление от сингулярности.

Хотя инварианты вышеприведенной модели легко назвать, гамильтонова редукция действия до конечномерного вместе с выводом скобок Пуассона требует некоторых выкладок. Первые результаты в этой области были получены 'т Хоофтом [6] и затем несколько скорректированы последователями [7]. В данной работе, в разделе 2, эти результаты будут воспроизведены следуя схеме [9], разработанной для теории Черна-Саймонса, в такой форме, которая допускает естественное обобщение на $3+1$ мерный случай.

В разделе 3 рассматривается $3+1$ мерная космологическая модель, где материя представлена двумя точечными скалярными частицами, находящимися в противоположных концах вселенной. Хотя в общем случае задача двух тел в $3+1$ мерной гравитации не решаема, наша модель обладает сферической симметрией. Поэтому решение может быть получено склейкой кусков решения Шварцшильда, аналогично тому, как решение $2+1$ мерной гравитации может быть составлено из кусков пространства Минковского. Схема гамильтоновой редукции из раздела 2 обобщается на эту модель. Геометрия полученного импульсного пространства указывает на то, что радиус вселенной имеет дискретный спектр в области, где классически должна быть сингулярность.

2 Модель на двумерном диске

Неоднородная космологическая модель в трёхмерном пространстве-времени $\mathbb{D}\times\mathbb{R}$ определяется действием:

$$S[A;h] = \frac{k}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{D}\times\mathbb{R}} \langle A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \rangle + \int\limits_{\gamma} dt \langle K, h^{-1}(\partial_t + A_t)h \rangle, \tag{1}$$

где $A = A_\mu^{\ IJ} dx^\mu t_{IJ}$ - форма связности (калибровочное поле) главного расслоения с базой $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ и с калибровочной группой $ISO(1,2)$, t_{IJ} - генераторы $iso(1,2)$; $K = mJ_{12}$ - заряд точечного источника массы m, J_{12} - генератор алгебры $so(2)$ - генератор, оставляющий ось времени неподвижной; $h : \mathbb{R} \to ISO(1,2)$ - функция на мировой линии источника $\gamma = \mathbb{R}$; $\langle \cdot \ \cdot \rangle$ - невырожденное антидиагональное скалярное произведение на $iso(1,2)$. Антидиагональность означает, что $\langle a, b \rangle \neq 0$ тогда и только тогда, когда $a \in so(1,2)$, $b \in \mathbb{R}^{1,2}$ (или наоборот), причём $\mathbb{R}^{1,2}$ понимается как алгебра трансляций. Пусть J_{ab} - генераторы алгебры $so(1,2)$, а P_a - генераторы алгебры трансляций, тогда по определению:

$$\langle P_a, J_{bc} \rangle = \varepsilon_{abc},$$
$$\langle P_a, P_b \rangle = \langle J_{ab}, J_{cd} \rangle = 0.$$

Модель (1) для произвольной группы Ли G называется теорией Черна-Саймонса с точечным источником на диске. Можно показать, что если $G = ISO(1,2)$, то такая теория эквивалентна теории относительности Эйнштейна с нулевой космологической постоянной в трёхмерном пространстве-времени с точечной частицей в качестве поля материи.

Найдём вариацию действия (1). Прямым вычислением получаем:

$$\delta S[A] = \frac{k}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{D}\times\mathbb{R}} \langle \delta A \wedge \left(F - h\overline{K}h^{-1}\delta^{(2)}(x - x_p) \right) \rangle + \frac{k}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} \langle \delta A \wedge A \rangle,$$

где $x_p \in \gamma$ - пространственная координата мировой линии частицы; $F = dA + A \wedge A$ - форма кривизны (напряжённость калибровочного поля); $\overline{K} = -\frac{2\pi}{k} K$; $\partial\mathbb{D} \times \mathbb{R} = \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ - граница пространства-времени. Следуя принципу наименьшего действия, приходим к уравнениям движения:

$$F = h\overline{K}h^{-1}\delta^{(2)}(x - x_p), \tag{2}$$
$$A|_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} = 0,$$

которые в объёме $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ могут быть решены точно для произвольной калибровки:

$$A = g^{-1}(d + \overline{K} d\phi) g. \tag{3}$$

Нетрудно заметить, что уравнения (2) несовместны. В самом деле, рассмотрим петлю Вильсона вдоль границы диска:

$$W_{\mathbb{S}} = \operatorname{tr} \mathcal{P} \exp \oint\limits_{\mathbb{S}} A,$$

где $\mathcal{P}$ - оператор упорядочения вдоль контура интегрирования. Вычислим $W_{\mathbb{S}}$ в трёхмерном представлении группы $SO(1,2)$. С одной стороны, согласно решению (3), получаем, что $W_{\mathbb{S}} = 1 + 2\cos\frac{4\pi^2 m}{k}$. С другой, уравнения движения на границе приводят к иному результату: $W_{\mathbb{S}} = 3$. Поскольку масса - произвольный положительный вещественный параметр, и петля Вильсона является калибровочным инвариантом, имеем противоречие.

Существует несколько способов сделать теорию (1) самосогласованной. Например, можно фиксировать граничные условия так, чтобы вариация действия на границе обращалась в ноль. Для этого удобно переписать вариацию действия на границе в виде:

$$\frac{k}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} \langle \delta A \wedge A \rangle = \frac{k}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} dt d\phi \langle A_\phi \delta A_t - A_t \delta A_\phi \rangle.$$

Наиболее «большим» множество экстремалей будет, если на границе пространства-времени временная компонента связности обращается в ноль:

$$A_t|_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} = 0. \tag{4}$$

Аналогичного условия можно было бы требовать и для A_ϕ компоненты. Однако, можно показать, что такое ограничение не согласуется с уравнениями движения в объёме. Отметим, что условие (4) не является калибровочно инвариантным.

Взамен условия (4), можно прибавить к функционалу (1) граничный вклад:

$$-\frac{k}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} dtd\phi\langle A_\phi A_t\rangle.$$

Результат сложения будем считать новым определением обсуждаемой космологической модели. Справедливость такого перехода легко увидеть, если проварьировать новое слагаемое:

$$-\frac{k}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} dtd\phi\langle A_\phi\delta A_t + A_t\delta A_\phi\rangle.$$

Полная вариация действия на границе тогда:

$$-\frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} dtd\phi\langle A_t\delta A_\phi\rangle.$$

Очевидно, что тогда граничное условие (4) для «исправленной» теории становится уравнением движения.

Перейдём непосредственно к обсуждению теории (1). Структура прямого произведения пространства-времени $\mathbb{D}\times\mathbb{R}$ позволяет глобально разложить связность и дифференциал на пространственную и временную составляющие $A = dtA_t + \tilde{A},\ d = dt\partial_t + \tilde{d}$. С учётом условия (4), действие тогда примет вид:

$$S[A_t,\tilde{A};h] = -\frac{k}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{D}\times\mathbb{R}} dt\wedge\langle\tilde{A}\wedge\partial_t\tilde{A}\rangle + \int\limits_\gamma dt\langle K, h^{-1}\partial_t h\rangle + \tag{5}$$
$$+\frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{D}\times\mathbb{R}} dt\wedge\langle A_t,\tilde{F}\rangle + \int\limits_\gamma dt\langle A_t, hKh^{-1}\rangle.$$

Заметим, что действие (5) определяет теорию с лагранжевой связью. Видно, что уравнение:

$$\frac{\delta S}{\delta A_t} = \frac{k}{2\pi}\tilde{F} + g^{-1}Kg\delta^{(2)}(x-x_p) = 0 \tag{6}$$

не содержит производных по времени и является уравнением связи, A_t выступает в роли множителя Лагранжа.

Уравнения (6) содержатся среди уравнений движения (2). Соответствующее точное решение в произвольной калибровке:

$$\tilde{A} = g^{-1}(\tilde{d} - \frac{2\pi}{k}Kd\phi)g. \tag{7}$$

Важно заметить, что форма угла $d\phi$ не является точной, поскольку $\int\limits_0^{2\pi} d\phi \neq 0$. Для решения (3) и (7) это означает, что $dd\phi = \delta^{(2)}(x - x_p)$.

Далее удобно воспользоваться антидиагональностью скалярного произведения $\langle \cdot\ \cdot \rangle$. При этом следует учитывать структуру полупрямого произведения структурной группы $ISO(1,2) = SO(1,2) \ltimes \mathbb{R}^{1,2}$, т. е. что $g = e^X u$, где X - элемент алгебры трансляций, а $u \in SO(1,2)$. Решение (7) тогда разлагается соответственно на трансляционную $\tilde{A}_T$ и лоренцеву $\tilde{A}_\Lambda$ компоненты:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \tilde{A}_T + \tilde{A}_\Lambda, \\ \tilde{A}_T &= u^{-1}(\tilde{d}X - \frac{2\pi}{k}[K, X]d\phi)u, \\ \tilde{A}_\Lambda &= u^{-1}(\tilde{d} - \frac{2\pi}{k}Kd\phi)u, \end{aligned} \tag{8}$$

где использовано тождество $e^{-X}Ke^X = [K, X] + K$.

Используя такое разложение, перепишем кинетический член действия (5) в виде:

$$-\frac{k}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{D}\times\mathbb{R}} dt \wedge \langle \tilde{A} \wedge \partial_t \tilde{A} \rangle = -\frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{D}\times\mathbb{R}} dt \wedge \langle \tilde{A}_T \wedge \partial_t \tilde{A}_\Lambda \rangle,$$

где использована антидиагональность скалярного произведения $\langle \cdot\ \cdot \rangle$. Если подставить выражения для $\tilde{A}_T$ и $\tilde{A}_\Lambda$ явно, получится цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}_T \wedge \partial_t \tilde{A}_\Lambda \rangle &= \langle \tilde{d}X \wedge \tilde{d}(\partial_t u u^{-1}) \rangle + \langle [\overline{K}d\phi, X] \wedge \tilde{d}(\partial_t u u^{-1}) \rangle + \langle \tilde{d}X \wedge [\overline{K}d\phi, \partial_t u u^{-1}] \rangle = \\ &= \tilde{d}\langle \tilde{d}X, \partial_t u u^{-1} \rangle - \tilde{d}\langle [\overline{K}d\phi, X], \partial_t u u^{-1} \rangle + \langle [\overline{K}d\phi, X], \partial_t u u^{-1} \rangle \delta^{(2)}(x - x_p), \end{aligned}$$

где в первом равенстве использована формула $\partial_t(u^{-1}\tilde{d}u) = u^{-1}\tilde{d}(\partial_t u u^{-1})u$, а во втором – правило Лейбница для дифференциальных форм и неточность формы $d\phi$. Последнее слагаемое выражает кинетический член действия частицы в формуле (5) взятый с обратным знаком. Остальные представляют собой полную производную и могут быть проинтегрированны.

Окончательно, ограничив область определения действия (5) на решение связи (8), получим:

$$S[X, u] = \frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} \langle \partial_\phi X, \partial_t u u^{-1} \rangle d\phi dt - \int\limits_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} \langle [K, X], \partial_t u u^{-1} \rangle d\phi dt, \tag{9}$$

где первое слагаемое в (9) известно как действие Весса-Зумино-Виттена для группы $ISO(1,2)$.

Полученный результат представляет собой простейший случай голографии, когда топологическая теория с конечным числом степеней свободы в объёме воспроизводит теорию поля на границе. Локальная $ISO(1,2)$ симметрия при этом нарушается. Динамическими переменными теперь становятся калибровочные степени свободы на границе, которые возникают при восстановлении калибровочного произвола в граничных условиях (4).

Функции на отрезке

Заметим, что действие (7) можно записать следующим образом:

$$S[X, u] = \frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} \langle \nabla_\phi X, \partial_t u u^{-1} \rangle d\phi dt, \tag{10}$$

где введена ковариантная производная $\nabla_\phi X = \partial_\phi X + [\overline{K}, X]$ для связности $A_\phi = \overline{K}$.

Предполагается, что поля в теории однозначны на границе $\mathbb{S}$, т. е. являются периодическими функциями по ϕ. Положим, что существуют $\tilde{X}, \tilde{u}$ непериодические на $\mathbb{S}$. Такое положение эквивалентно требованию однозначности тех же полей $\tilde{X}, \tilde{u}$, но определённых на отрезке $I = [0, 2\pi]$, т. е. значения полей в точках $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi$ теперь различны. Последнее означает, что существует калибровочное преобразование такое, что $\nabla_\phi \mapsto \partial_\phi$. Нетрудно увидеть, что это преобразование имеет вид:

$$X \mapsto \tilde{X} = e^{\overline{K}\phi} X e^{-\overline{K}\phi},$$
$$u \mapsto \tilde{u} = e^{\overline{K}\phi} u.$$

Иначе говоря, такое преобразование выражает пространственную компоненту связности в форме чистой калибровки:

$$\tilde{A} = \tilde{g}^{-1} d\tilde{g}, \tag{11}$$

где $\tilde{g} = e^{\overline{K}\phi} g$ - калибровочные функции на $I \times \mathbb{R}$. Формула (11) справедлива также для случая произвольной группы Ли.

Окончательно, теория (10) определяется действием Весса-Зумино-Виттена для полей на отрезке:

$$S[\tilde{X}, \tilde{u}] = \frac{k}{2\pi} \int\limits_{I \times \mathbb{R}} \langle \partial_\phi \tilde{X}, \partial_t \tilde{u} \tilde{u}^{-1} \rangle d\phi dt. \tag{12}$$

3 Модель на двумерной сфере

Аналогично теории для диска определяется неоднородная космологическая модель для двумерной сферы в пространстве-времени $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$:

$$S[A; h_1, h_2] = \frac{k}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}} \langle A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \rangle + \tag{13}$$
$$+ \int\limits_{\gamma_1} dt \langle K_1, h_1^{-1}(\partial_t + A_t) h_1 \rangle + \int\limits_{\gamma_2} dt \langle K_2, h_2^{-1}(\partial_t + A_t) h_2 \rangle.$$

Как и раньше действие (13) описывает теорию относительности Эйнштейна с нулевой космологической постоянной. Полями материи теперь является пара точечных частиц.

В отличие от (1), определение величин зарядов для точечных источников в модели (13) требует отдельного пояснения. Сначала заметим, если рассматривать на сфере один источник, то такая теория либо противоречива, либо пуста. Обозначим W_C петлю Вильсона вдоль экватора C. Положим, что $K_1 = m t_{12},\ K_2 = 0$. Тогда, решая уравнения движения, аналогично (3) получим, что $A = g^{-1}(d - \frac{2\pi}{k} K_1 d\phi) g$. Следовательно петля Вильсона: $W_C = 1 + 2\cos\frac{4\pi^2 m}{k}$. С другой стороны, контур C можно стянуть в точку вдоль полусферы, на которой точечный источник отсутствует, тогда получим $W_C = 3$. Таким образом, для самосогласованности требуется дополнительное условие на массу частицы: $m = \frac{kn}{2\pi}$, где n - положительное целое. Если такое ограничение выполнено, то порядок действий, предложенный для теории на диске, без изменений переносится на случай сферы. Однако, в отличии от диска, граница сферы является пустым множеством, а значит действие теории тождественно обращается в ноль.

Итак, для непротиворечивости и нетривиальности теории требуется наличие минимум пары частиц. Естественно потребовать, чтобы такая модель обладала симметрией по отношению к перестановке источников. Преобразование, меняющее их местами, реализуется на полях материи следующим образом:

$$h_1 \mapsto h_2 N,$$
$$h_2 \mapsto h_1 N^{-1},$$

где $M : \mathbb{R} \to ISO(1,2)$. Нетрудно показать, что такое преобразование действительно реализует $\mathbb{Z}_2$ симметрию тогда и только тогда, когда заряды принадлежат одному и тому же классу сопряжённости $K_2 = NK_1N^{-1}$. Рассуждением, аналогичным выше изложенному, можно показать, что массы частиц должны удовлетворять следующему требованию:

$$m_1 + m_2 = \frac{kn}{2\pi},\ n \in \mathbb{Z}.$$

причём такое условие, как будет показано ниже, не приводит к тривиальности теории.

Аналогично теории на диске, для пространства-времени $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ разложения $A = dt\partial_t + \tilde{A},\ d = dt\partial_t + \tilde{d}$ выполняются глобально, тогда для (13) получим:

$$S[A_t, \tilde{A}; h_1, h_2] = -\frac{k}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}} dt \wedge \langle \tilde{A} \wedge \partial_t \tilde{A} \rangle + \int\limits_{\gamma_1} dt \langle K_1, h_1^{-1}\partial_t h_1 \rangle + \int\limits_{\gamma_2} dt \langle K_2, h_2^{-1}\partial_t h_2 \rangle + \tag{14}$$
$$+\frac{k}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}} dt \wedge \langle A_t, \tilde{F} \rangle + \int\limits_{\gamma_1} dt \langle A_t, h_1 K_1 h_1^{-1} \rangle + \int\limits_{\gamma_2} dt \langle A_t, h_2 K_2 h_2^{-1} \rangle.$$

Заметим, что в отличие от (5), выражение (14) не нуждается в выполнении условия (4), поскольку $\partial\mathbb{S}^2 = \varnothing$.

Далее будем рассматривать каждый источник отдельно. Для этого необходимо перейти к покрытию сферы парой дисков $\mathbb{D}_i,\ i = 1,2$, и двуугольником $\mathbb{P}$ с отождествлёнными вершинами $p_1 = p_2$:

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{P} \cup \mathbb{D}_2, \tag{15}$$

причём предполагается, что в любой фиксированный момент времени на любом из дисков оказывается только одна частица, т. е. $\gamma_i \subset \mathbb{D}_i \times \mathbb{R}$. Покрытие (15) таково, что общей точкой его любого элемента являются вершины двуугольника. Дополнительно заметим, что $\mathbb{D}_i \cap \mathbb{P} = \partial\mathbb{P}_i = \partial\mathbb{D}_i = \mathbb{S}_i$, где $\partial\mathbb{P} = \partial\mathbb{P}_1 \cup \partial\mathbb{P}_2$, и $\partial\mathbb{P}_1 \cap \partial\mathbb{P}_2 = \{p_1, p_2\}$.

Переходя к теории на каждом из дисков $\mathbb{D}_i$ отдельно, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, получим:

$$S[X_i, u_i] = \frac{k}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{S}_i\times\mathbb{R}} \langle \partial_\phi X_i, \partial_t u_i u_i^{-1} \rangle d\phi dt - \int\limits_{\mathbb{S}_i\times\mathbb{R}} \langle [K_i, X_i], \partial_t u_i u_i^{-1} \rangle d\phi dt. \tag{16}$$

Нетрудно показать, что вклад действия на двуугольнике имеет вид:

$$S[X_0, u_0] = \frac{k}{2\pi} \int\limits_{\partial\mathbb{P}\times\mathbb{R}} \langle \partial_\phi X_0, \partial_t u_0 u_0^{-1} \rangle d\phi dt. \tag{17}$$

Удобно переписать этот вклад для каждой из сторон $\partial\mathbb{P}_i$ по отдельности. Введём новые обозначения:

$$Y_i = X_0|_{\partial\mathbb{P}_i}, \qquad v_i = u_0|_{\partial\mathbb{P}_i}, \tag{18}$$

тогда для (17) получим:

$$S[Y_1, Y_2, v_1, v_2] = \frac{k}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{P}_1\times\mathbb{R}} \langle \partial_\phi Y_1, \partial_t v_1 v_1^{-1}\rangle d\phi dt - \frac{k}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{P}_2\times\mathbb{R}} \langle \partial_\phi Y_2, \partial_t v_2 v_2^{-1}\rangle d\phi dt. \tag{19}$$

Знак минус между слагаемыми означает, что вдоль каждой стороны интегрирование ведётся от p_1 до p_2. Обратим внимание, что для новых переменных: $Y_1(p_i) = Y_2(p_i),\ v_1(p_i) = v_2(p_i)$.

Для того, чтобы восстановить модель на всей сфере, в разложении (15) необходимо учесть условия сшивки для u_i, v_i, X_i, Y_i. Таковыми являются условия непрерывности связности на границе сшивки:

$$g_0^{-1}\tilde{d}g_0|_{\partial\mathbb{P}_1\times\mathbb{S}_1} = \tilde{g}_1^{-1}\tilde{d}\tilde{g}_1|_{\partial\mathbb{P}_1\times\mathbb{S}_1},$$
$$g_0^{-1}\tilde{d}g_0|_{\partial\mathbb{P}_2\times\mathbb{S}_2} = \tilde{g}_2^{-1}\tilde{d}\tilde{g}_2|_{\partial\mathbb{P}_2\times\mathbb{S}_2},$$

где $\tilde{g}_i = \tilde{u}_i e^{\tilde{X}_i}$ - выражает решение уравнений связи на каждом диске по аналогии с (11), $g_0 = u_0 e^{X_0}$ - решение связи на двуугольнике. Перепишем эти условия в терминах подходящих переменных:

$$Y_i = N_i e^{-\overline{K}_i\phi} X_i e^{\overline{K}_i\phi} N_i^{-1}, \qquad v_i = N_i e^{-\overline{K}_i\phi} u_i, \tag{20}$$

где $\overline{K}_i = -\frac{2\pi}{k}K_i$, и $N_i = N_i(t)$ - произвольные зависящие только от времени функции со значением в $ISO(1,2)$. Условия (20) действительно общим образом выражают непрерывность связности, поскольку $N_i^{-1}\tilde{d}N_i = 0$.

Любое из слагаемых в (19) после учёта условий сшивки (20) приобретает вид:

$$S[X_i, u_i] = -\frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}_i\times\mathbb{R}} \langle(\partial_\phi X_i + [\overline{K}_i, X_i]), \partial_t u_i u_i^{-1}\rangle d\phi dt - \tag{21}$$
$$-\frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}_i\times\mathbb{R}} \langle(\partial_\phi X_i + [\overline{K}_i, X_i]), N_i^{-1}\partial_t N_i\rangle d\phi dt.$$

Восстановим теперь теорию на всей сфере. Собирая вместе (16) и (21) получим:

$$S[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, N_1, N_2] = \frac{k}{2\pi}\int\limits_{I_2\times\mathbb{R}} \langle \partial_\phi \tilde{X}_2, N_2^{-1}\partial_t N_2\rangle d\phi dt - \frac{k}{2\pi}\int\limits_{I_1\times\mathbb{R}} \langle \partial_\phi \tilde{X}_1, N_1^{-1}\partial_t N_1\rangle d\phi dt,$$

где использованны $\tilde{X}_i = e^{\overline{K}_i\phi} X_i e^{-\overline{K}_i\phi}$ - функции на отрезках $I_i = [0, 2\pi]$.

Можно заметить, что последнее выражение является полной производной по ϕ. Окончательно действие теории:

$$\frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \langle(\tilde{X}_2(p_2) - \tilde{X}_2(p_1)), N_2^{-1}\partial_t N_2\rangle dt - \frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \langle(\tilde{X}_1(p_2) - \tilde{X}_1(p_1)), N_1^{-1}\partial_t N_1\rangle dt. \tag{22}$$

Приведём (22) к канонической форме. Сначала заметим, что из (18) и (20) следует, что $\tilde{X}_2(p_i) = N^{-1}\tilde{X}_1(p_i)N$, где введено удобное обозначение $N = N_1^{-1}N_2$. Тогда получим:

$$\frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \langle(\tilde{X}_1(p_2) - \tilde{X}_1(p_1)), N^{-1}\partial_t N\rangle dt.$$

Вспомним, что $\tilde{X}_1 = e^{\overline{K}_1\phi}X_1e^{-\overline{K}_1\phi}$. Точки p_1, p_2 отвечают значениям угла 0 и 2π соответственно, причём функция $X_1(\phi, t)$ периодична по ϕ. Пусть $N = N_T N_\Lambda$, где N_T - трансляция, $N_\Lambda \in SO(1,2)$. Определим траекторию частицы переменной $R = N_\Lambda^{-1}X_1(0,t)N_\Lambda$, которая принимает значения в алгебре трансляций. Импульс частицы определим в виде функции $\omega = N_\Lambda^{-1}e^{-\frac{4\pi^2}{k}K_1}N_\Lambda$, принимающей значения в группе $SO(1,2)$. Действие для частицы тогда в канонической форме имеет вид:

$$S[R,\omega] = \frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \langle R, \partial_t\omega\omega^{-1}\rangle dt. \tag{23}$$

Строго говоря, переменная ω не является произвольной, поскольку $\mathrm{tr}\ \omega = W_{\mathbb{C}} = 1+2\cos\frac{4\pi^2 m_1}{k}$. Для того, чтобы это исправить, добавим к теории (23) связь:

$$S[R,\omega] = \frac{k}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \langle R, \partial_t\omega\omega^{-1}\rangle dt + \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda\Big(\mathrm{tr}\ \omega - (1 + 2\cos\frac{4\pi^2 m_1}{k})\Big)dt, \tag{24}$$

где $\lambda = \lambda(t)$ - множитель Лагранжа, а ω принимает произвольное значение в группе $SO(1,2)$.

Подведём итог. Замечательным оказывается то, что топологическая теория поля (12) в трёхмерном пространстве-времени при наличии пары источников, может быть редуцирована к одномерной (механической) теории. В результате действие (24) явно выделяет конечное число наблюдаемых степеней свободы частицы K_1, причём в качестве системы отсчёта выбирается система покоя частицы K_2. Модель (27) известна как (2+1)-мерная квантовая механика частицы в гравитационном поле. Импульс ω принимает значение в группе $SO(1,2)$, которая является трёхмерным гиперболоидом вращения. Среди всех направлений такого гиперболоида имеется одно компактное. Соответствующая компонента импульса p_ϕ тогда оказывается периодичной. В результате квантования периодичность p_ϕ приводит к дискретному спектру временной координаты.

4 Модель на трёхмерном шаре

Неоднородная космологическая модель в четырёхмерном пространстве-времени $\mathbb{S}^3\times\mathbb{R}$ определяется действием:

$$S[\omega, e; h_{(1)}, \chi_{(1)}, h_{(2)}, \chi_{(2)}] = \frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{S}^3\times\mathbb{R}} d^4x\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abcd}R^{ab}{}_{\mu\nu}e^c{}_\rho e^d{}_\sigma + \tag{25}$$
$$+\int\limits_{\gamma_1} dt h^b_{(1)a}(e^a{}_t - \nabla_t\chi^a_{(1)})P_{(1)b} + \int\limits_{\gamma_2} dt h^b_{(2)a}(e^a{}_t - \nabla_t\chi^a_{(2)})P_{(2)b},$$

где $R^{ab}{}_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^{ab} + \omega_{[\mu}{}^{ac}\omega_{\nu],c}{}^b$ - тензор напряжённости калибровочного поля $\omega_\mu{}^{ab}$ в пространстве-времени $\mathbb{S}^3\times\mathbb{R}$ с калибровочной группой $SO(1,3)$, $\mathbb{S}^3$ - трёхмерная сфера; $e^a{}_\mu$ - тетрада -

векторное поле, принимающее значение в фундаментальном представлении группы $SO(1,3)$; $h^b_{(i)a} : \mathbb{R} \to SO(1,3)$ - функция на мировой линии частицы $\gamma_i = \mathbb{R}$, $\chi^a_{(i)}$ - набор скалярных полей на γ_i, преобразующийся по фундаментальному представлению калибровочной группы, $i = 1,2$; $P_{(i)a} = (m_i \ 0 \ 0 \ 0)$ - заряд точечного источника массы m_i - постоянный вектор фундаментального представления группы $SO(1,3)$.

Индексы $\mu, \nu, ...$ - пространственно-временные; $a, b, ...$ - внутренние значки калибровочной группы $SO(1,3)$. $\nabla_t \chi^a_{(i)} = \partial_t \chi^a_{(i)} + {\omega_t}^{ab} \chi_{(i)a}$ - ковариантная производная поля $\chi^a_{(i)}$ вдоль γ_i, вычисленная по спин-связности ${\omega_\mu}^{ab}$. Альтернирование пары индексов: ${e^a}_{[\mu} {e^b}_{\nu]} = {e^a}_\mu - {e^b}_\nu$, без нормировки на $\frac{1}{2}$.

Первое слагаемое в действии (23) называется действием Картана-Вейля, которое описывает теорию гравитации с нулевой космологической постоянной в четырёхмерным пространстве-времени. В качестве динамических переменных такой теории выступают ${\omega_\mu}^{ab}$ и ${e^a}_\mu$, что соответствует подходу Палатини в тетрадном формализме. В качестве полей материи выступает пара точечных частиц, действе для которых сформулировано в терминах подходящих переменных $h^b_{(i)a}$, $\chi^a_{(i)}$. Таким образом, действие (23) описывает теорию относительности Эйнштейна с двумя точечными частицами в качестве полей материи.

Исследуемая модель при определённых ограничениях допускает гамильтонову редукцию. Для того, чтобы это увидеть, как и в случае с теорией в (2+1) измерениях, удобно перейти к рассмотрению в терминах покрытия. А именно, пусть:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^3 &= \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2, \\ \mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 &= \mathbb{S}^2, \end{aligned} \tag{26}$$

– покрытие трёхмерной сферы парой шаров $\mathbb{B}_i$, пересекающихся по двухмерной сфере $\mathbb{S}^2$, причём в каждый момент времени на каждом из шаров оказывается только одна частица: $\gamma_i \subset \mathbb{B}_i \times \mathbb{R}$.

В теории (23) в качестве пространства-времени можно было бы рассмотреть $\mathbb{B} \times \mathbb{R}$, а вместо пары частиц – одну, индекс i тогда отсутствует. Аналогично трёхмерной теории на диске такой случай дополнительно требует граничных условий. В самом деле, проварьируем действие (23) с учётом приведённого замечания, тогда получим:

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{4\kappa} \int\limits_{\mathbb{B}\times\mathbb{R}} d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} \big(\delta {e^a}_\mu {e^b}_\nu {R^{cd}}_{\rho\sigma} + \delta {\omega_\mu}^{ab} {e^c}_\nu \nabla_\rho {e^d}_\sigma \big) + \\ + \frac{1}{8\kappa} \int\limits_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}} d^3x \varepsilon^{r\mu\nu\rho} \varepsilon_{abcd} \delta {\omega_\mu}^{ab} {e^c}_\nu {e^d}_\rho + \int\limits_\gamma dt \delta {e^a}_0 {h^b}_a P_{\ b}, \end{aligned}$$

где индекс r соответствует радиальной координате шара $\mathbb{B}$, а греческие индексы в граничном слагаемом соответствуют координатам на границе $\partial\mathbb{B} \times \mathbb{R} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Уравнения движения на границе соответственно:

$$\varepsilon_{abcd} {e^c}_{[\mu} {e^d}_{\nu]} |_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}} = 0.$$

По аналогии с моделью на диске можно показать, что уравнение движение на границе несовместимо с уравнениями в объёме шара. Перепишем граничный вклад явно:

$$\frac{1}{8\kappa} \int\limits_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}} \varepsilon^{r\phi\theta t} \varepsilon_{abcd} (\delta {\omega_\phi}^{ab} {e^c}_\theta {e^d}_t + \delta {\omega_\theta}^{ab} {e^c}_t {e^d}_\phi + \delta {\omega_t}^{ab} {e^c}_\phi {e^d}_\theta),$$

где (ϕ, θ) – координаты на сфере. Наиболее общими граничными условиями, которые обращают в ноль действие на границе, и которые согласуются с уравнениями движения в объёме являются:

$$\begin{aligned} \omega_t{}^{ab} &= 0, \\ e^a{}_t &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Заметим, что альтернативные условия $\omega_\phi{}^{ab} = 0,\ e^a{}_\phi = 0$ противоречат уравнениям в объёме.

Вместо введения граничных условий (25) можно рассматривать действие отличное от (23) на граничный вклад вида:

$$-\frac{1}{8\kappa} \int\limits_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}} d^3x \varepsilon^{rtij} \varepsilon_{abcd} e^a{}_{[i} e^b{}_{j]} \omega_t^{cd}.$$

Вариация такого вклада имеет вид:

$$-\frac{1}{8\kappa} \int\limits_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}} \varepsilon^{r\phi\theta t} \varepsilon_{abcd} (\delta e^a{}_\phi e^b{}_\theta \omega_t{}^{cd} + \delta e^a{}_\theta e^b{}_\phi \omega_t{}^{cd} + \delta \omega_t{}^{ab} e^c{}_\phi e^d{}_\theta).$$

Вариация действия «исправленной» теории на границе:

$$\frac{1}{8\kappa} \int\limits_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}} \varepsilon^{r\phi\theta t} \varepsilon_{abcd} \big((\delta \omega_\phi{}^{ab} e^c{}_\theta + \delta \omega_\theta{}^{ab} e^c{}_\phi) e^d{}_t + (\delta e^a{}_\phi e^b{}_\theta + \delta e^a{}_\theta e^b{}_\phi) \omega_t{}^{cd} \big).$$

Ясно, что соответствующие уравнения движения на границе тогда в точности воспроизводят условия (25).

Перейдём непосредственно к действию вида (23). Структура прямого произведения пространства-времени позволяет глобально разложить тетраду и спин-связность на пространственную и временную составляющие. С учётом условий (25), действие тогда примет вид:

$$\begin{aligned} S[\omega, e; h, \chi] = \frac{1}{4\kappa} \int\limits_{\mathbb{B} \times \mathbb{R}} d^4x \varepsilon^{tijk} \varepsilon_{abcd} e^a{}_t e^b{}_i R^{cd}{}_{jk} + \frac{1}{4\kappa} \int\limits_{\mathbb{B} \times \mathbb{R}} d^4x \varepsilon^{tijk} \varepsilon_{abcd} \omega_t{}^{ab} e^c{}_i \nabla_j e^d{}_k + \\ + \frac{1}{8\kappa} \int\limits_{\mathbb{B} \times \mathbb{R}} d^4x \varepsilon^{tijk} \varepsilon_{abcd} e^a{}_i e^b{}_j \partial_t \omega_k{}^{cd} + \int\limits_\gamma dt h^b{}_a (e^a{}_t - \nabla_t \chi^a) P_b. \end{aligned} \tag{28}$$

Первые два слагаемых соответствуют лагранжевой связи, $e^a{}_t,\ \omega_t{}^{ab}$ - множители Лагранжа. Соответствующие уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abcd} e^b{}_i R^{cd}_{jk} &= \varepsilon_{ijk} h^b{}_a P_b \delta^{(3)}(x - x_p),\ x_p \in \gamma, \\ \nabla_i e^a{}_j &= 0. \end{aligned} \tag{29}$$

В отличие от случая трёхмерной гравитации, уравнения связи (29) не могут быть решены точно в общем виде. Ниже будет рассмотрен специальный случай, когда решение обладает дополнительной симметрией. Потребуем, чтобы поля теории были сферически инварианты.

Прежде чем продолжить, напомним, что действие (25) инвариантно не только относительно калибровочной группы $SO(1,3)$, но и относительно группы диффеоморфизмов пространства-времени. Пусть N^μ - малые диффеоморфизмы. Тогда динамические переменные теории преобразуются по закону:

$$\begin{aligned} e^a{}_\mu &\mapsto g^a{}_b(e^b{}_\mu + \nabla_\mu \xi^b), \\ \omega_\mu{}^{ab} &\mapsto (g^{-1})^a{}_c(\omega_\mu{}^{cd} + N^\nu R^{cd}{}_{\nu\mu} + \eta^{cd}\partial_\mu)g_d{}^b, \end{aligned} \tag{30}$$

где $g^a{}_b$ - калибровочное преобразование группы $SO(1,3)$, а $\xi^a = N^\mu e^a{}_\mu$.

Одним из стационарных сферически симметричных решений уравнений (29) является решение Шварцшильда:

$$\begin{aligned} \omega_\theta{}^{12} = N, \quad \omega_\phi{}^{13} = N\sin\theta, \quad \omega_\phi{}^{23} = \cos\theta, \\ e^1{}_r = \frac{1}{N}, \quad e^2{}_\theta = R, \quad e^3{}_\phi = R\sin\theta, \end{aligned} \tag{31}$$

где $N = \sqrt{1 - \frac{2mG}{R}}$, R - радиус шара $\mathbb{B}$, измеряемый по его границе $\partial\mathbb{B} = \mathbb{S}^2$. Для удобства введём обозначения для предложенного решения: $\bar{\omega}_i{}^{ab}$, $\bar{e}^i{}_a$. Любое другое сферически симметричное решение может быть получено из (31) преобразованием (30). Сферическая симметрия решения уравнений (29) означает также, что в преобразовании (30) диффеоморфизмы ξ^a могут быть приведены к виду: $\xi_a = (f_0\ f_1\ 0\ 0)$, где $f_0 = f_0(t,r,\phi,\theta)$ и $f_1 = f_1(t,r,\phi,\theta)$.

Подставим решение (31) после преобразований (30) в действие (28). Соответствующий полям $\omega_i{}^{ab}$, $e^i{}_a$ кинетический член:

$$\frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{B}\times\mathbb{R}} d^4x \varepsilon^{tijk}\varepsilon_{abcd} g^a{}_e(\bar{e}^e{}_i + \bar{\nabla}_i\xi^e)g^b{}_f(\bar{e}^f{}_j + \bar{\nabla}_j\xi^f)\partial_t\big((g^{-1})^c{}_e(\bar{\omega}_k{}^{ef} + N^\nu \bar{R}^{ef}{}_{\nu k} + \eta^{ef}\partial_k)g_f{}^d\big),$$

где ковариантная производная $\bar{\nabla}_i$ вычисляется при помощи связности $\bar{\omega}_i{}^{ab}$. Обозначим $\bar{e}^a_{(N)i} = \bar{e}^a{}_i + \bar{\nabla}_i\xi^a$, тогда:

$$\frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{B}\times\mathbb{R}} d^4x \varepsilon^{tijk}\varepsilon_{abcd} g^a{}_e\bar{e}^e_{(N)i} g^b{}_f\bar{e}^f_{(N)j}\big(\partial_t((g^{-1})^c{}_e\bar{\omega}_k{}^{ef}g_f{}^d) + \partial_t((g^{-1})^c{}_e N^\nu \bar{R}^{ef}{}_{\nu k}g_f{}^d) + \partial_t((g^{-1})^c{}_e\eta^{ef}\partial_k g_f{}^d)\big).$$

Далее учтём, что $\partial_t((g^{-1})^a{}_b\partial_k g^b{}_c) = (g^{-1})^a{}_d\partial_k\big((\partial_t g g^{-1})^d{}_e\big)g^e{}_c$, а также стационарность решения $\bar{\omega}_i{}^{ab}$, $\bar{e}^i{}_a$. После сокращений получим:

$$\frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{B}\times\mathbb{R}} d^4x \varepsilon^{tijk}\varepsilon_{abcd}\bar{e}^a_{(N)i}\bar{e}^b_{(N)j}\big(\bar{\nabla}_{(N)k}(\partial_t g g^{-1})^{cd} + (\partial_t N^\nu)\bar{R}^{cd}{}_{\nu k}\big),$$

где $\bar{\nabla}_{(N)i}$ - ковариантная производная, вычисленная при помощи связности $\bar{\omega}_i{}^{ab} + N^\nu R^{ab}{}_{\nu i}$. Будем учитывать только первый порядок малости по ξ^a. Тогда, интегрируя по частям, получаем:

$$\frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}} d^3x \varepsilon^{trij}\varepsilon_{abcd}\bar{e}^a_{(N)i}\bar{e}^b_{(N)j})(\partial_t g g^{-1})^{cd} - \frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{B}\times\mathbb{R}} d^4x \varepsilon^{tijk}\varepsilon_{abcd}\bar{\nabla}_{(N)i}(\bar{e}^a_{(N)j}\bar{e}^b_{(N)k})(\partial_t g g^{-1})^{cd}.$$

Поскольку уравнения связи (29) инвариантны относительно диффеоморфизмов N^μ, то последнее слагаемое обращается в ноль в силу $\bar{\nabla}_{(N)i}\bar{e}^a_{(N)j} = 0$. Окончательно получим:

$$\frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}} d^3x \varepsilon^{trij}\varepsilon_{abcd}\big(\bar{e}^a{}_i\bar{e}^b{}_j + 2\bar{e}^a{}_i\bar{\nabla}_j\xi^b\big)(\partial_t g g^{-1})^{cd}. \tag{32}$$

Приведённое вычисление игнорирует дельта-функцию в уравнениях (29). Это вызвано тем, что в терминах тетрады и спин-связности соответствующий вклад явно не может быть найден. Однако, существует иной подход к исследуемой модели, когда в качестве динамической переменной выступает только связность A^{IJ}, которая принимает значения в алгебре $so(1,4)$. Калибровочной группой в таком подходе является группа $SO(1,4)$, которая нарушается до калибровочной группы $SO(1,3)$, таким образом восстанавливается действие (25). Более подробно указанный подход рассматривается в работе [], где дельта-функциональный вклад вычисляется явно. Окончательно, подстановка решения уравнений связи в (28) приводит к действию (32) на границе $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Заметим, что в действии (32) фигурируют только ϕ и θ компоненты решения (31). В соответствии с этим будет удобно ввести следующие обозначения. Пусть $n_a = (0\ 1\ 0\ 0)$ - орт в направлении радиальной координаты шара. Тогда нетрудно проверить, что на границе тетрада $\bar{e}^a{}_i$ может быть представлена в виде:

$$\frac{R}{N}\bar{\nabla}_i n^a = \bar{e}^a{}_i,$$

где $i = \phi, \theta$. Также можно показать, что для решения (31) справедлива формула:

$$\bar{e}^a{}_{[i}\bar{e}^b{}_{j]} = \Big(\frac{R^2}{1-N^2}\Big)\bar{R}^{ab}{}_{ij}.$$

С учётом сделанных замечаний выражение (32) приобретает вид:

$$\frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}} d^3x\varepsilon^{trij}\varepsilon_{abcd}\Big(\Big(\frac{R^2}{1-N^2}\Big)\bar{R}^{ab}{}_{ij} + 2\bar{\nabla}_i(n^a\bar{\nabla}_j\xi^b)\Big)(\partial_t g g^{-1})^{cd}.$$

Определим вспомогательную связность $\hat{\omega}_i{}^{ab}$ следующим образом:

$$\hat{\omega}_i{}^{ab} = \bar{\omega}_i{}^{ab} + \Big(\frac{2(1-N^2)}{NR}\Big)n^{[a}\bar{\nabla}_i\xi^{b]}.$$

Тогда действие (32) окончательно приобретает вид:

$$\frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}} d^3x\varepsilon^{trij}\varepsilon_{abcd}\Big(\frac{R^2}{1-N^2}\Big)\hat{R}^{ab}{}_{ij}(\partial_t g g^{-1})^{cd}, \tag{33}$$

где $\hat{R}^{ab}{}_{ij}$ - кривизна связности $\hat{\omega}_i{}^{ab}$.

Вернёмся к случаю, когда пространство-время является прямым произведением $\mathbb{S}^3\times\mathbb{R}$. Редукция (32), выполненная для $\mathbb{B}\times\mathbb{R}$, тогда справедлива для каждого элемента $\mathbb{B}_i\times\mathbb{R}$ покрытия (25). Соответствующую каждому шару границу обозначим соответственно $\mathbb{S}^2_i\times\mathbb{R},\ i=1,2$.

Рассмотрим покрытие сфер $\mathbb{S}^2_i$, на каждой из которых определено действие вида (33), парами дисков $\mathbb{D}_{ij},\ j=1,2$, причём такое, что каждая пара пересекающихся по окружности:

$$\mathbb{S}^2_1 = \mathbb{D}_{11}\cup\mathbb{D}_{12},\quad \mathbb{D}_{11}\cap\mathbb{D}_{12} = \mathbb{S}_1;$$
$$\mathbb{S}^2_2 = \mathbb{D}_{21}\cup\mathbb{D}_{22},\quad \mathbb{D}_{21}\cap\mathbb{D}_{22} = \mathbb{S}_2.$$

Действие для теории на каждой из полусфер сохраняет вид (33). Однако, в отличии от $\mathbb{S}^2_i$, кривизна $\hat{R}^{ab}{}_{ij}|_{\mathbb{D}}$ на каждом из дисков $\mathbb{D}_{ij}$ при помощи калибровочного преобразования может быть приведена к полной производной. Более подробно, существует такая калибровка v, для которой: $\hat{R}^{ab}{}_{\theta\phi} = \partial_\theta \hat{\omega}_\phi{}^{ab}$.

Найдём явный вид v. Сначала заметим, что кривизна решения Шварцшильда, ограниченного на любую из полусфер $\mathbb{D}_{ij}$, может быть приведена к виду $\bar{R}^{ab}{}_{\theta\phi} = \partial_\theta \bar{\omega}_\phi{}^{ab}$ при помощи преобразования $\bar{v} = \exp\{N\theta T_{12}\}$, где T_{12} - генератор вращения алгебры $so(1,3)$. Нетрудно увидеть, что такое $\bar{v}$ обращает в ноль компоненту связности $\bar{\omega}_\theta{}^{12}$. Для того, чтобы привести $\hat{R}^{ab}{}_{ij}$ к полной производной, соответствующее преобразование v должно аналогично обращать в ноль $\hat{\omega}_\theta{}^{12}$. Подобное преобразование могло бы выглядеть как: $v \sim \bar{v}\exp\{n^2\xi^1 T_{12}\}$. Однако, поскольку диффеоморфизмы малы, то компонента $\hat{\omega}_\theta{}^{12}$ в первом порядке по ξ^a обращается в ноль при помощи $v = \bar{v} = \exp\{-\frac{\pi N}{2}\theta T_{12}\}\exp\{N\theta T_{12}\}$, где без ограничения общности v выбрано тождественным при $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Напомним, что множитель $\partial_t g g^{-1}$ в формуле (33) выражает калибровочный произвол. Поэтому необходимо учитывать, что g преобразуется как $v^a{}_b g^b{}_c$. Таким образом, действием преобразования v теория (33) на $\mathbb{D}_{ij} \times \mathbb{R}$ приводится к виду:

$$-\frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{D}_{ij}\times\mathbb{R}} d^3x \varepsilon_{abcd}\Big(\frac{R^2}{1-N^2}\Big)\partial_\theta \hat{\omega}_\phi{}^{ab}(\partial_t g g^{-1})^{cd}, \tag{34}$$

где $\varepsilon^{tr\theta\phi} = -1$.

Модель на всей трёхмерной сфере $\mathbb{S}^3$ будем восстанавливать в следующем порядке. Сначала выполним сшивку только между верхними (нижними) полусферами, т. е. $\mathbb{D}_{1i} \cup \mathbb{D}_{2i}$. При этом, по аналогии с моделью в (2+1) измерениях, необходимо соблюсти условие непрерывности связности на границе сшивки:

$$(\hat{\omega}_i{}^{ab})|_{\partial\mathbb{D}_{1i}\times\mathbb{R}} = (\hat{\omega}_i{}^{ab})|_{\partial\mathbb{D}_{2i}\times\mathbb{R}}, \ i = 1,2.$$

Поскольку $\hat{\omega}_\theta{}^{ab} = 0$, то, согласно закону преобразования связности, условия непрерывности:

$$(g^{-1}\partial_\theta g)|_{\partial\mathbb{D}_{1i}\times\mathbb{R}} = (g^{-1}\partial_\theta g)|_{\partial\mathbb{D}_{2i}\times\mathbb{R}},$$

для произвольного калибровочного преобразования g. Откуда:

$$g|_{\partial\mathbb{D}_{2i}\times\mathbb{R}} = \gamma_{(i)} g|_{\partial\mathbb{D}_{1i}\times\mathbb{R}}, \tag{35}$$

где функция перехода $\gamma_{(i)} = \gamma_{(i)}(t,\phi)$ принимает значения в группе $SO(1,3)$.

В результате такой процедуры, учитывая (35), для действия (33) на $\mathbb{D}_{2i} \times \mathbb{R}$ получим:

$$-\frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{D}_{1i}\times\mathbb{R}} d^3x \varepsilon_{abcd}\Big(\frac{R^2}{1-N^2}\Big)\partial_\theta \hat{\omega}_\phi{}^{ab}(\partial_t g g^{-1})^{cd} - \frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{D}_{1i}\times\mathbb{R}} d^3x \varepsilon_{abcd}\Big(\frac{R^2}{1-N^2}\Big)\partial_\theta \hat{\omega}_\phi{}^{ab}(\partial_t \gamma_{(i)}(\gamma_{(i)})^{-1})^{cd}.$$

Комбинируя полученное действие с действием (33) на $\mathbb{D}_{1i} \times \mathbb{R}$, находим:

$$\frac{1}{8\kappa}\int\limits_{\mathbb{D}_{1i}\times\mathbb{R}} d^3x \varepsilon_{abcd}\Big(\frac{R^2}{1-N^2}\Big)\partial_\theta \hat{\omega}_\phi{}^{ab}(\partial_t \gamma_{(i)}(\gamma_{(i)})^{-1})^{cd}.$$

Нетрудно увидеть, что подынтегральное выражение является полной производной по θ и может быть проинтегрированно. Тогда действие, которое остаётся после такой процедуры в каждом случае для $i = 1, 2$ имеет вид:

$$\frac{1}{8\kappa} \int\limits_{\partial \mathbb{D}_{1i} \times \mathbb{R}} d^2 x \varepsilon_{abcd} \Big(\frac{R^2}{1 - N^2} \Big) \hat{\omega}_{\phi}{}^{ab} (\partial_t \gamma_{(i)} (\gamma_{(i)})^{-1})^{cd}, \tag{36}$$

где $\partial \mathbb{D}_{1i} = \mathbb{S}_i$. Все величины в (36) берутся на границе сшивки, т. е. при $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Стоит отметить, что среди ненулевых компонент связности в действии (36) после преобразования v остаётся лишь $\bar{\omega}_{\phi}{}^{13}$, поскольку $\bar{\omega}_{\phi}{}^{23}(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Для того, чтобы выполнить восстановить модель (25) на всей сфере $\mathbb{S}^3$, будет удобно найти такое калибровочное преобразование, которое обращает в ноль компоненту $\bar{\omega}_{\phi}{}^{13}$. Напомним, что поля в теории (36) являются периодическими функциями от ϕ, поэтому соответствующее калибровочное преобразование не определено. Однако, вместо периодических функций на $\mathbb{S}_i$ можно рассмотреть функции на отрезке $I_i = [0, 2\pi]$, когда граничные точки $0,\ 2\pi$ не отождествляются. В таком случае нетрудно проверить, что соответствующее преобразование имеет вид: $h = \exp\{N\phi T_{13}\}$. Далее, по аналогии с теорией в (2+1)-измерениях, получим условия непрерывности связности для действия (36):

$$\gamma_{(2)}|_{\{0,2\pi\}} = \alpha \gamma_{(1)}|_{\{0,2\pi\}}, \tag{37}$$

где $\alpha = \alpha(t)$ - функция времени, принимающая значения в $SO(1,3)$.

Последним шагом до восстановления исходной модели (25) будет отождествление концов отрезков I_i:

$$\begin{gathered} I_1 \cup I_2, \\ I_1 \cap I_2 = \{0, 2\pi\}. \end{gathered} \tag{38}$$

В итоге действие принимает вид

$$\frac{1}{4\kappa} \int\limits_{\mathbb{R}} dt R \varepsilon_{abcd} n^a \xi^b (u^{-1} \partial_t u)^{cd} + \lambda \Big(Tr(u) - \cos(\sqrt{1 - 2mG/R}) \Big), \tag{39}$$

где связь возникает в следствии инвариантности следа относительно сопряжений. Заметим, что несмотря на наличие квадратного корня в уравнении связи выражение везде вещественно и однозначно, т.к. $\cos(-x) = \cos(x)$ и $\cos(ix) = \cosh(x)$. $Tr(u) < 1$ соответствует эллиптическим преобразованиям Лоренца, а $Tr(u) > 1$ – гиперболическим.

С учетом сферической симметрии у нас есть всего две независимые компоненты координаты и импульса – временная и радиальная. Это позволяет переписать действие (39) как

$$\frac{1}{4\kappa} \int\limits_{\mathbb{R}} dt R (\xi^0 \partial_t p_0 + \xi^1 \partial_t p_1) + \lambda \Big(\cos(p_0) \cosh(p_r) - \cos(\sqrt{1 - 2mG/R}) \Big), \tag{40}$$

где была введена следующая параметризация преобразования Лоренца

$$u = \exp\Big(p_0 T_{ij} n_k \epsilon^{ijk} + p_1 T^{0i} n_i \Big) \tag{41}$$

и использована коммутативность радиальных бустов с изотропными комбинациями вращений.

Здесь следует заметить, что поскольку диффеоморфизмы ξ^a везде предполагались малыми, и делалось разложение до низшего порядка по ξ^a, полученный кинетический член в действии (39) является не собственно действием (симплектическим потенциалом) вида $p\delta q$, а его вариацией (симплектической формой) вида $\delta p \wedge \delta q$. Здесь роль δp играет $u^{-1}\delta u$, а роль δq играет ξ^a.

Канонические координаты X^a, такие что $\delta X^a = \xi^a$ имеют смысл физических (вычисляемых с помощью метрики вдоль геодезической линии) координат границы шара по отношению к его центру:

$$X^a = \int\limits_0^{r_s} U(0,r)^a_b e^b(r), \tag{42}$$

где r_s– радиальная координата границы шара, а $U(0,r)^a_b = P\exp(\int\limits_0^r \omega^a_b(r')dr')$ – матрица поворота вектора при параллельном переносе вдоль радиальной геодезической. Выражение (42) явно инвариантно, т.е. не зависит от системы координат в которых вычислено, при условии, что эти координаты хорошо определены на всем шаре. Сами же величины X^a могут быть использованы в качестве радиальной и временной компонент границы шара. По своему поведению в окрестности горизонта эти координаты больше похожи на координаты Крускала, чем Швацшильда (хотя и не совсем совпадают с ними). Они преобразуются как лоренцев вектор при бустах в радиальном направлении, а лоренц–ивариантный интервал $X^a X_a$ обращается в ноль на горизонте. При этом пространственная и временная координаты местами не меняются, а меняется направление вектора X^a с пространственноподобного на времениподобное.

С другой стороны величина R, входящая в **(??)** имеет смысл радиуса шара, вычисленного на его поверхности вдоль меридиана, т.е. сопадает с радиальной координатой в системе координат Шварцшильда. Он является скаляром по отношению к бустам в радиальном направлении и поэтому связан с X^a как $R = R(X^a X_a)$, явная формула для этой зависимости пока отсутствует.

Даже при отсутствии явных формул для скобок Пуассона, используя только уравнение связи, уже можно сделать некоторые выводы относительно физических следствий данной модели. Канонические импульсы принимают значения на группе Лоренца, причем времениподобная компонента импульса соответствует вращению, а пространственноподобная – бусту. Снаружи радиуса Шварцшильда этот элемент группы Лоренца является эллиптическим, т.е. может быть сведен преобразованием подобия к чистому повороту. Внутри радиуса Шварцшильда он является гиперболическим, т.е. может быть сведен преобразованием подобия к чистому бусту. Последнее означает, что для объектов внутри радиуса Шварцшильда не существует системы покоя, пространственная компонента импульса не может быть обращена в ноль, что соответствует общеизвестным фактам о черных дырах.

В квантовой теории если какая-то из величин удовлетворяет периодическим граничным условиям, то канонически сопряженная ей величина будет иметь дискретный спектр. Здесь получается, что периодическим является импульс, канонически сопряженный временной координате. Поскольку в рассматриваемой космологической модели относительные координаты двух частиц почти всегда времениподобны, можно ожидать, что радиус вселенной имеет дискретный спектр.

5 Заключение

Метод гамильтоновой редукции, разработанной в [9] для теории Черна-Саймонса, допускает обобщение на 3+1 мерную гравитацию в сферически симметричном случае. В результате получается модель с конечным числом степеней свободы и фазовым пространством имеющим нетривиальную геометрию. По сравнению с более ранними работами [8] удалось найти вещественные координаты, покрывающие фазовое пространство полностью.

Нетривиальная геометрия фазового пространства с одной стороны позволяет объяснить замыкание вселенной и формирование горизонтов событий. С другой стороны она имеет важные следствия в квантовой теории, такие как дискретность в координатном пространстве. Последнее может способствовать разрешению сингулярности большого взрыва.

Работа пока находится на этапе приготовления модели к квантованию. По завершении гамильтонова анализа можно будет искать представления операторов координат и импульсов на некотором гильбертовом пространстве и вычислять их спектр.

References

[1] Quantum cosmology. 1. Charles W. Misner (Maryland U.). Jul 1969. 9 pp. Published in Phys.Rev. 186 (1969) 1319-1327

Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory Bryce S. DeWitt (Princeton, Inst. Advanced Study , North Carolina U.). 1967. 36 pp. Published in Phys.Rev. 160 (1967) 1113-1148

[2] K. V. Kuchar and M. P. Ryan, Is minisuperspace quantization valid?: Taub in mixmaster, Phys. Rev. D40 3982 (1989)

[3] D. Craig, P. Singh, Consistent probabilities in Wheeler-DeWitt quantum cosmology, Phys. Rev. D82 123526 (2010)

[4] Loop Quantum Cosmology: A Status Report Abhay Ashtekar (Penn State U.), Parampreet Singh (Louisiana State U.). Aug 2011. 136 pp. Published in Class.Quant.Grav. 28 (2011) 213001

[5] M. Bronstein, Phys. Zeitschr. Sow. **9** (1936)

[6] G. 't Hooft: Canonical quantization of gravitating point particles in 2+1 dimensions, Class. Quantum Grav. **10** (1993) 1653.
G. 't Hooft: Quantization of point particles in (2+1)-dimensional gravity and spacetime discreteness, Class. Quantum Grav. **13** (1996) 1023.

[7] H. J. Matschull and M.Welling, "Quantum mechanics of a point particle in 2+1 dimensional gravity," Class. Quant. Grav. **15**, 2981 (1998) arXiv:grqc/ 9708054.

[8] V.A.Berezin, A.M.Boyarsky, A.Yu.Neronov.Phys.Rev. D 57 1118 (1998), e-print archive gr-qc/9708060,

Victor Berezin Published in Int.J.Mod.Phys. A17 (2002) 979-988 e-Print: gr-qc/0112022

[9] A. Y. Alekseev and A. Z. Malkin, "Symplectic structure of the moduli space of at connection on a Riemann surface," Commun. Math. Phys. **169**, 99 (1995) [arXiv:hep-th/9312004].

C. Meusburger and B. J. Schroers, "Phase space structure of Chern-Simons theory with a non-standard puncture," Nucl. Phys. B **738**, 425 (2006) [arXiv:hep-th/0505143].

[10] G. Amelino-Camelia, Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale," Int. J. Mod. Phys. **D 11**, 35 (2002) arXiv:gr-qc/0012051.

J. Kowalski-Glikman, Introduction to doubly special relativity," Lect. Notes Phys. **669** (2005) 131 arXiv:hep-th/0405273.

[11] S. W. MacDowell and F. Mansouri, "Unified Geometric Theory Of Gravity And Supergravity," Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 739 [Erratum-ibid. **38** (1977) 1376].

[12] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B79** (1974) 276.
A.M. Polyakov, JETP Lett. **20** (1974) 194.

[13] T. T. Wu and C. N. Yang, Phys. Rev. **D12** (1975) 3845.

[14] P.A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A133** (1931) 60.

[15] Laurent Freidel, Etera R. Livine "Effective 3-D quantum gravity and non-commutative quantum field theory" Published in Phys.Rev.Lett. **96** (2006) 221301 e-Print: hep-th/0512113